

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП. ШЕШІМНІҢ БАР БОЛУЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

19 қыркүйек 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің бар болуын көрсету

Негізгі сұрақтар:

- 1 Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
- 2 Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
- 3 Локалды емес тура есептің әлсіз шешімінің бар болуы
- 4 Локалды емес тура есептің әлді шешімінің бар болуы



Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} = \mathbf{e}(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық.

мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтың қысымы, ал ν және χ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.



Definition

(1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
- 2 Ω -да барлық дерлік жерде $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
- 3 Кез келген $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ және барлық $t \in (0, T)$ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} + \kappa (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} = \\ f(t) (\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} - \\ \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.



Definition

(1)-(5) кері есебінің әлді шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)), \mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega)), f(t) \in L^2[0, T];$
- 2 әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [1] мақаладағыдай $\mathbf{u}$ және f функциялары белгілі болғаннан кейін де Рамм леммасын қолданып, (2) теңдеуден бірімәнді қалпына келтіруге болады.



S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh.

The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity. Nonlinearity 34 (2021), no. 5, 3083–3111.



Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \quad (7)$$

$$\exists k_0 \in \mathbb{R} : 0 < k_0 < \infty, \quad |g_0(t)| = |(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}| \geq k_0 > 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)); \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (10)$$

$$(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0); \quad (11)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (12)$$



Енді (1) теңдеуді $\omega(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (5) қосымша және (8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$f(t) = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} + \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2,\Omega} - \right. \\ \left. ((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \omega, \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) := F_1(\mathbf{u}, t). \quad (13)$$

Мұнан соң, (13) өрнекті (1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds - \nabla p = \\ F_1(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad (14)$$

теңдеулер жүйесін, (3) бастапқы және (4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u}, t) = f(t)$ функциясы (13) өрнекпен анықталады. Демек, (1)-(5) кері есебін, сәйкесінше, (14), (3)-(4) локалды емес тура есепке алып келдік.



Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Lemma

Айталық, (8)-(11) шарттар орындалсын. Демек, (1)-(5) кері есебі (14), (3)-(4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни (u, p, f) функциялары (1)-(5) кері есебінің шешімі болса, онда (u, p) жұбы (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, (u, p) функциялары (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1)-(5) кері есебінің шешімін береді.

(14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 1 және 2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.



Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (1)-(2) теңдеулер жүйесінен (14) теңдеуді алуда дәлелденді.

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан, $(\mathbf{u}, p)$ функциялар жұбы (13) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1)-(4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса, $(\mathbf{u}, p, f)$ функциялары (1)-(5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.

Кері жорып, яғни (5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

$$(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e_1(t), \quad t \in [0, T] \quad (15)$$

болсын, мұндағы $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (10), (15) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0, T])$ орындалады, сонымен қатар (11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0).$$

Енді (14) өрнекке $\boldsymbol{\omega}$ функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, сонымен бірге (15) шартты ескерсек, онда

$$\begin{aligned} e_1'(t) + \kappa(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \\ \int_0^t K(t-s)(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \right. \\ \left. \nu(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s)(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} ds \right) (\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (16)$$



теңдігі шығады, сондай-ақ (8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

және одан $t \geq 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.



Алдағы уақытта 3-лемма бойынша (1)-(5) кері есебінің орнына (14), (3)-(4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Theorem

Айталық, (7)-(12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\chi}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|g(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2. \quad (18)$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (14), (3)-(4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні есептің берілгендері арқылы анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_1; L^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|u\|_{L^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T_1; L^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 \leq C, \quad (19)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

4-теоремадағы (18) шарт (5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезінде пайда болды. Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.



Бұл бөлімшеде қарастырылып отырған кері есептің әлді шешімінің бар болуы зерттелінеді.

Theorem

Айталық, 4-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шарт орынды болсын

$$u_0(x) \in V \cap H^2(\Omega). \quad (20)$$

Олай болса, (14), (3)-(4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (19) бағалауға қоса

$$\|u\|_{L^\infty(0, T_1; V \cap H^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T_1; V \cap H^2(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (21)$$

бағалау орынды болады, мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.



Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (14), (3)-(4) локалды емес тура есеп үшін

$$\tilde{\Delta}\varphi_k := -\mathbb{P}\Delta\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k(x) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \quad (22)$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды[1], [2].



O.A. Ladyzhenskaya.

On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers, Journal of Mathematical Sciences. 99 (2000) 888–897.



O.A. Ladyzhenskaya.

The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II, Nauka, Moscow, 1970.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

